INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL

ESCUELA SUPERIOR DE INGENIERIA YARQUITECTURA

ACADEMIA DE MATEMÁTICAS

GUÍA DE ESTUDIO PARA EL EXAMEN A TITULO DE SUFICIENCIA DE MATEMATICAS III

La presente guía cuenta con dos secciones, la primera sección es de problemas propuestos, organizados de acuerdo a las unidades establecidas en el programa de la asignatura. La segunda sección del documento es un grupo de ejercicios resueltos como muestra al alumno.

Se recomienda al estudiante profundizar en los conceptos y en el desarrollo de diversos ejercicios correspondientes a los temas considerados en el programa de la asignatura, ya que todos ellos son susceptibles a ser evaluados, y para tal fin, se propone la siguiente bibliografía.

Cálculo de varias variables, James Stewart. Cengage, octava edición.
Calculus, volumen II, Salas/Hille/Etgen. Editorial Reverté, 4ta. Edición.
Calculo con geometría analítica, Dennis G. Zill. Grupo editorial Iberoamérica.
Cálculo 2, Ron Larson & Bruce H. Edwards. Mc Graw Hill, Novena edición.

INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL

ESCUELA SUPERIOR DE INGENIERIA YARQUITECTURA

ACADEMIA DE MATEMÁTICAS

GUÍA DE ESTUDIO PARA EL EXAMEN A TITULO DE SUFICIENCIA DE MATEMATICAS III

PROBLEMAS PROPUESTOS.

ÁLGEBRA ESCALAR Y VECTORIAL.

1. *(a) Encontrar los vectores de posición **r**$_1$ y **r**$_2$ de los puntos P(2,4,3) y Q(1,-5,2) en un sistema de coordenadas rectangulares en función de los vectores unitarios **i**, **j** y **k**. (b) Determinar la suma o resultante de dichos vectores.*

2. *Halle un vector unitario **u** que tenga la misma dirección que **a**=**i**+2**j**+3**k***

3. *Si* $|\mathbf{a}| = 3$ *y* $|\mathbf{b}| = 5$, *(a) ¿qué tan largo puede ser* $|a+b|$*? (b) ¿Qué tan pequeño?*

4. *Dados los vectores **r**$_1$=3**i** -2**j** + **k**, **r**$_2$=2**i** - 4**j** - 3**k**, **r**$_3$=-**i** +2**j** +2**k**. Hallar el módulo de:*

a) *2**r**$_1$-3**r**$_2$-5**r**$_3$*

5. *Dados los vectores **u**=2**i**-3**j**+4**k**; **v**=-5**i**+**j**-**k**; **w**=**i**+2**j**-**k** y **t**=2**i**+2**j**+**k**. Calcular:*

a) *Escribir:*

i. ***u** como combinación lineal de **v, w** y **t**.*

b) *Los ángulos que forman:*

i. ***u**, **v**, **w** y **t**, con los ejes x, y, z, respectivamente.*

ii. ***u** + **v** y **w** – **t**.*

c) *La proyección de:*

i. ***u** sobre **v**, **w** y **t** respectivamente.*

ii. *4**u** +3**v** sobre **w** - 3**t**.*

d) *Calcular:* $(u-3v)\bullet(3w+t)$

i. $(u-3v)x(3w+t)$

ii. $(5u+v)\bullet(w+t)x(w-t)$

e) *Calcular el volumen del paralelepípedo conformados a partir de los vectores: **u, v** y **w**.*

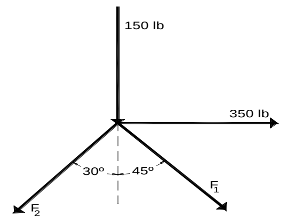
6. *Determinar si los conjuntos de vectores son linealmente independientes:*

a) ***u**=5**i**-2**j**+3**k**, **v**=-2**i**+**j**-**k** y **w**=4**i**-3**j**-**k**.*

7. *Un vector **A** de magnitud 30 se aplica en el punto P(3,2,-4) en dirección al punto Q(-1,0,1) determinar las componentes rectangulares de **A**.*

8. *Resolver:*

a) *El siguiente diagrama de cuerpo libre representa el nodo de una armadura, encontrar las fuerzas faltantes para que el nodo este en equilibrio.*



9. *Demostrar que* ***A****=3****i****-2****j****+****k****,* ***B****=****i****-3****j****+5****k****,* ***C****=2****i****+****j****-4****k*** *forman un triángulo rectángulo.*

10. *Encontrar el área del triángulo y los ángulos internos cuyos vértices son los puntos:*

- ***a)*** *(3,-1,2), (1,-1,-3) y (4,-3,1).*

11. *Las Diagonales de un paralelogramo son* ***A****=3****i*** *+ 6****j*** *– 2****k*** *y* ***B*** *= 2****i*** *- 3****j*** *– 6****k****. Demostrar que dicho paralelogramo es un rombo y hallar sus ángulos y la longitud de sus lados.*

12. *Hallar el área del paralelogramo con diagonales:*

- ***a)*** ***A*** *= 3****i*** *+* ***j*** *– 2****k*** *y* ***B*** *=* ***i*** *- 3****j*** *+4****k***

DIFERENCIACIÓN VECTORIAL.

1. *Hallar la ecuación de una recta que pasa por:*

- ***a)*** *(2,1,1) y es paralela a* ***u****=2****i****+****j****-****k***
- ***b)*** *el origen y es paralela a la recta x=2t, y=1-t, z=4+3t.*
- ***c)*** *el punto (1,0,6) y es perpendicular al plano x+3y+z=5.*
- ***d)*** *los puntos (3,1,-1) y (3,2,-6).*

2. *Dados los puntos A(3,-1,2), B(2,1,1), C(-3,1,2). Hallar la ecuación del plano que:*

- ***a)*** *pasa por A, B y C.*
- ***b)*** *pasa por B y es paralelo a* ***l****=2t****i****-(1+3t)****j****+5t****k***
- ***c)*** *Que pasa por el punto (4,-2,3) y es paralelo al plano 3x-7z=12.*
- ***d)*** *contiene a la recta* ***l****=(3+2t)****i****+t****j****+(8-t)****k*** *y es paralelo al plano 2x+4y+8z=17*
- ***e)*** *pasa por el punto (1,2,3) y contiene a la recta* ***l****=3t****i****+(1+t)****j****+(2-t)****k***

3. *Determinar la distancia más corta:*

- ***a)*** *del punto (2,8,5) al plano x-2y-2z=1.*
- ***b)*** *Entre los planos z=x+2y+1 y 3x+6y-3z=4.*

4. *Determinar el ángulo entre las rectas y en caso de que exista, el punto de intersección entre ellas.*

$$x = 4 + t;\;\; y = 5 + t;\;\; z = -1 + 2t$$

$$x = 6 + 2s; \;\; y = 11 + 4s; \;\; z = -3 + 5s$$

5. *Realice lo que se le pide*

a) *Encuentre la intersección de los planos y el ángulo entre ellos. Exprese la intersección en forma vectorial.*

$5x - 4y - 9z = 8$

$x + 4y + 3z = 4$

b) *Encuentre el punto de intersección del plano y la recta. Encuentre también el ángulo entre el plano y la recta.*

$2x - 3y + 2z = 7$

$x = 1 + 2t; y = 2 - t; z = 3t$

6. *Determinar el dominio de las siguientes funciones vectoriales:*

a) **r(t)=t*i*+** $\frac{t}{t^2-9}$ ***j*+** $\frac{3}{t}$ ***k***

b) **r(t) =** $\sqrt{2-t}$ ***i*+** $\sqrt{t+2}$ ***j*+** $\frac{\cos t}{t^3-t}$ ***k***

7. *Esbozar las gráficas de las siguientes funciones vectoriales:*

a) **r**(t)=t**i**+t^2**j**+t^4**k**

b) **r**(t)=sentí+cost**j**+t/2**k**

c) **r**(t)=t**i**+cost**j**+sent**k**

8. *Calcular a)* $\frac{dR}{dt}$, *b)* $\frac{d^2R}{dt^2}$, *c)* $\left|\frac{dR}{dt}\right|$, *d)* $\left|\frac{d^2R}{dt^2}\right|$, *siendo:*

R = t^2**i**+sen t**j** +cos t**k**.

9. *Calcular un vector unitario tangente a la curva descrita por la función dada en el punto dado:*

a) **r**(t)=(2+t)**i**- t^3 **j**+ $5t^4$ **k**, (3,-1,5)

b) **r**(t)= $\frac{t}{2-t}$ **i**- $sen(3t)$**j**+ e^{2t} **k**, (0,0,1)

10. *Hallar la velocidad y la aceleración de una partícula que se mueve a lo largo de una curva:*

x=4cost; y=4sent; z=6t^4.

11. *Dados* **A**(t)=t**i**-t^2**j**+(t-1)**k** y **B**(t)= 2t^2**i**+6t**k**, *Hallar:*

a) $\int_0^2 A \cdot B dt$

b) $\int_0^2 AXB dt$

12. *Dada la función vectorial y las condiciones iniciales determinar la función vectorial* **r**(t).

a) **r'**(t)=t**i**-3**j**+2t**k**; **r**(0)=**i**-3**k**

b) *$\mathbf{r}''(t)=(3t-1)\mathbf{i}-2t\mathbf{j}+t^3\mathbf{k}$; $\mathbf{r}'(1)=2\mathbf{i}+\mathbf{j}-5\mathbf{k}$ y $\mathbf{r}(0)=\mathbf{i}-3\mathbf{j}-\mathbf{k}$*

13. *Determinar la longitud de arco de la curva descrita por **r**(t):*

a) $\mathbf{r}(t)=\mathbf{i}+t^2\mathbf{j}+t^3\mathbf{k}$ *de (1,0,0) a (1,4,8)*

b) $\mathbf{r}(t)=cost\mathbf{i}+sent\mathbf{j}+t\mathbf{k}$ *de (1,0,0) a (1,0,2π)*

14. Encuentre la curvatura

a) $\vec{r}(t)=t\hat{\imath}+\frac{1}{2}t^2\hat{\jmath}+\frac{1}{3}t^3\hat{k}$

SISTEMAS DE REFERENCIA.

1. *Transformar las siguientes coordenadas rectangulares a polares: **a)**(2,5), **b)**(-5,3), **c)**(-1,-3), **d)**(2,-2).*

2. *Transformar las siguientes ecuaciones a coordenadas polares*

a) *x=2*

b) $x^2+(y-2)^2=4$

c) $(x^2+y^2)^2=2xy$

3. *Transformar las siguientes coordenadas polares a rectangulares:*

a) *(5,π/3),*

b) *(2,4π/5),*

c) *(7,8π/7),*

4. *Transformar la ecuación a coordenadas rectangulares*

a) $rsen\phi=4$

b) $\phi=\frac{1}{3}\pi$

c) $r=\dfrac{2}{1-\cos\phi}$

5. *Transformar las coordenadas (x,y,z) a coordenadas cilíndricas y esféricas:*

a) *(2,5,1)*

b) *(2,2,-2),*

6. *Transformar las coordenadas cilíndricas o esféricas a retangulares cartesianas (x,y,z):*

a) *(1,π/5,3),*

c) *(6,4π/3,5π/6),*

7. *Escriba la ecuación en coordenadas cilíndricas y esféricas.*

a) $x^2 + y^2 + z^2 = 16$

b) $x^2 + y^2 = 2z$

CÁLCULO DE VARIAS VARIABLES.

1. *Calcular el dominio de:*

b) $f(x,y) = \sqrt{3-y} - 6$

c) $f(x,y) = \dfrac{x+5y}{x^2+y^2-4}$

2. *Dibujar la región del plano que representa el dominio de las siguientes funciones:*

a) $f(x,y) = \sqrt{x-5} + 2$

b) $f(x,y) = \sqrt{25-y^2}$

c) $f(x,y) = \sqrt{x} + \sqrt{y}$

3. *Trace las curvas de nivel para las siguientes funciones z=f(x,y) donde z pertenece a los enteros:*

a. $z = 6 - 3x - 2y$

b. $\boldsymbol{z} = \sqrt{9 - \boldsymbol{x}^2 - \boldsymbol{y}^2}$

4. *Determinar la derivada con respecto de x & y de primer y segundo orden:*

a) $z = 3x^3y^2 + 5xy - 7x^5$

b) $z = x^2y^2 + \ln\left|x^3y^3\right|$

5. *Obtener la diferencial total y el cambio real de la función:*

$f(x,y) = x^2 + x^2y^2 + 2$, cuando va del punto (1,1) al punto (1.1,0.9)

6. *Calcular* ∇A *Siendo:*

a. $A = x^2 + y^2 - 3xyz$

b. $A = xy^2z + 2x^2y$

7. *Hallar la ecuación del plano tangente a la superficie* $xz^2+x^2y=z-x$*, en el punto A(1,-3,2)*

8. *Hallar las ecuaciones respectivas del plano tangente y la recta normal a la superficie* $z=x^2+y^2$ *en el punto T(2,-1,5).*

9. *Encuentre la derivada direccional de las funciones en la dirección*

$$f(x,y) = e^{2x} seny \text{ en el punto } \left(0, \frac{\pi}{4}\right) \text{ y en la dirección de } \vec{w} = (1,-1)$$

10. *Encuentre los puntos críticos de las funciones y clasifíquelos*
    - ***a)*** $f(x,y) = -x^3 + 4xy - xy^2 + 1$
    - ***b)*** $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3x^2 - 3y^2 - 9x$

CAMPOS ESCALARES Y ROTACIONALES.

1. *Siendo* $\phi = 2xz^4 - x^2 y$*, Hallar:*
   - a. $\nabla\phi$ *y* $|\nabla\phi|$ *en el punto (2,-2,-1).*
   - b. *El rotacional del gradiente de* ϕ
   - c. *La divergencia del gradiente de* ϕ

2. *Siendo* ***A=*** $2x^2$ ***i-*** $3yz$ ***j+*** xz^3 ***k*** *y* $\phi = 2z - x^3 y$ *Hallar:*
   - a. $A \bullet \nabla\phi$ *en el punto Q(1,-1,1)*
   - b. $AX\nabla\phi$*, en el punto Q(1,-1,1)*

3. *Siendo* ***A****=*$2x^2$***i****–3yz****j****+*xz^2***k*** *y* $\phi = 2z - x^2 y$*, Hallar:*
   - a. $A \cdot \nabla\phi$ *y* $AX\nabla\phi$ *en el punto (1,-1,1).*
   - b. *El gradiente de la divergencia de* ***A***
   - c. *El gradiente de* $A \cdot \nabla\phi$

4. *Siendo* ***A=*** $3xyz^2$ ***i+*** $2xy^3$ ***j-*** x^2yz ***k*** *y* $\phi = 3x^2 - yz$*, Hallar:* ***a)*** $\nabla \bullet A$*,* ***b)*** $\boldsymbol{A} \cdot (\nabla\phi)$*,* ***c)*** $\nabla \bullet (\nabla\phi)$ *en el punto (1,-1,1).*

INTEGRACIÓN VECTORIAL.

1. *Resolver las integrales propuestas:*

a) $$\int_{-1}^{3}\int_{1}^{2} \left(x^2 + y\right) dxdy$$

b) $$\int_{0}^{1}\int_{-y-1}^{y-1} \left(x^2 + y^2\right) dxdy$$

c) $$\int_{1}^{3}\int_{0}^{x^2}\int_{y}^{2y} 2(x+z)\, dzdydx$$

2. *Evaluar:*

- **a)** $\iint_R xy\,dA$ *donde R es el rectángulo cuyos vértices son (0,0); (0,5); (3,5) y (3,0).*
- **b)** $\iint_R -2y\,dA$ *donde R es la región acotada por y=4-x^2 y y=4-x.*
- **c)** $\iint_R \left(x^2+y\right)dA$ *donde R es la región comprendida entre las curvas $x^2+y^2=1$ y $x^2+y^2=5$.*
- **d)** $\iint_R \left(x+y\right)dA$ *donde R es la región acotada por el círculo de radio 2 con centro en el origen donde x≥0 y y≥0.*
- **e)** $\iint_R \arctan\frac{y}{x}\,dA$ *donde R es la región en la cual $x^2+y^2\geq 1$; $x^2+y^2\leq 4$ y 0≤x≤y.*

3. *Evaluar:*

- **a)** $\iiint_E dV$ *donde E es el espacio limitado por las superficies* $z=1-y^2$, $2x+3y+z+10=0$ *y* $x^2+y^2-x=0$.
- **b)** $\iiint_E x^2y^2z^2dV$ *donde E es el espacio limitado por z=y+1; y+z=1; x=0; x=1 y z=0.*
- **c)** $\iiint_E y^2dV$ *donde E es el tetraedro en el primer octante limitado por los planos coordenados y el plano 2x+3y+z=6.*
- **d)** $\iiint_E dV$ *donde E es el espacio del primer octante limitado por las superficies z=x, y-x=2 y* $y=x^2$.
- **e)** $\iiint_E dV$ *donde E es el espacio limitado por las superficies* $x^2+z=4$, $x+z=2$, *y=0 y y=3.*

4. *Hallar el volumen del sólido dado:*

- **a)** *Debajo del paraboloide $z=x^2+y^2$ y arriba de la región limitada por $y=x^2$ y $x=y^2$.*
- **b)** *Debajo de la superficie z=xy y arriba del triángulo cuyos vértices son (1,1), (4,1) y (1,2).*

5. *Encuentre la masa y el centro de masa de la lámina que ocupa la región D y tiene función de densidad* ρ *dada; D es la región triangular con vértices (0,0), (1,1), (4,0);* $\rho(x,y)=x$

6. *Determinar el centroide y los momentos de inercia con respecto a los ejes x y y de las siguientes regiones:*

a) *El cuarto de círculo de radio r, con centro en el origen que se encuentra en el primer cuadrante.*

7. *Evalué la integral de línea, donde C es la curva dada:*

a) $\int_C xy^4 ds$ *. C es la mitad del circulo* $x^2+y^2=16$.

b) $\int_C ye^x ds$ *. C es el segmento de recta que une (1,2) a (4,7).*

c) $\int_C xy^3 ds$*, C: x=4sent, y=4cost, z=3t, 0≤t≤π/2*

8. *Siendo* **A=** $(3x+6y)\mathbf{i} - 2yz\mathbf{j} + 20xz\mathbf{k}$ *. Encontrar la* $\int_C \mathbf{A}\cdot d\mathbf{r}$ *desde (0,0,0) a (1,2,3) a lo largo de la curva cuyas ecuaciones paramétricas son x=t, y=2t, z=3t*

9. *Hallar el trabajo realizado al desplazar una partícula en el campo de fuerzas* $\mathbf{F}=3x^2\mathbf{i}+(2xz-y)\mathbf{j}+z\mathbf{k}$ *a lo largo de,*
a) *La curva* $x=2t^2$*, y=t,* $z=4t^2-t$ *desde t=0 hasta t=1.*

10. *Verificar el Teorema de Green para:*

a) $\int_C (2x-y)dx + (-x+y)dy$ *donde C es la curva acotada por* $y=x^2$ *y y=x.*

b) $\int_C xydx + x^2y^3dy$ *Donde C es el triángulo con vértices (0,0), (1,0) y (1,2).*

11. *Utilice el teorema de Green para evaluar las siguientes integrales de línea a lo largo de la curva dada:*

a) $\int_C e^y dx + 2xe^y dy$ *donde C es el cuadrado limitado por las gráficas x=0; x=1; y=0 y y=1.*

b) $\int_C \left(y+e^{\sqrt{x}}\right)dx + \left(2x+\cos y^2\right)dy$ *donde C es la frontera de la región de la región limitada por las parábolas* $y=x^2$ *y* $x=y^2$.

EJERCICIOS RESUELTOS.

1. Obtener la magnitud y dirección de la resultante de:
A (3, 5), B (6, -2), C (-5, -1), D (-3, 4)

SOLUCIÓN

$$\sum x = 3 + 6 + (-5) + 3 = 1$$
$$\sum y = 5 + (-2) + (-1) + 4 = 6$$

$$||\Delta|| = \sqrt{(\sum \boldsymbol{x})^{\,2} + (\sum \boldsymbol{y})^{\,2}}$$
$$||R|| = \sqrt{(1)^2 + (6)^2} = \sqrt{1+36} = \sqrt{37}$$

$$\theta = tg^{-1}\left(\frac{6}{1}\right)$$

2. Obtener el producto escalar de:
   a) $(3, 5) \bullet (6, 4)$
      SOLUCIÓN
$$(3)(6) + (5)(4)$$
$$= [18 + 20]$$
$$= 38$$

   b) (4, -3) • (-2, -1)
      SOLUCIÓN
$$(4)(-2) + (-3)(-1)$$
$$= [-8 + (+3)]$$
$$= -5$$

   c) (-1, 4) • (2, 2)
      SOLUCIÓN
$$(-1)(2) + (4)(2)$$
$$= [-2 + 8]$$
$$= 6$$

   d) (2, 1)• (1, 4)

      SOLUCIÓN
$$(2)(1) + (1)(4)$$
$$= [2 + 4]$$
$$= 6$$

3. Obtener el producto vectorial o cruz de: $(3, 2, 1) \bullet (5, -1, 2)$
   SOLUCIÓN:
$$\begin{bmatrix} i & j & k \\ 3 & 2 & 1 \\ 5 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$
$$= \hat{\imath}\big((2)(2) - (-1)(1)\big) - \hat{\jmath}\big((3)(2) - (5)(1)\big) + k\big((3)(-1) - (5)(2)\big)$$
$$= i[3] - j[3] - 13k$$

4. Solucionar:
   a) $(5, -1, 4) \bullet (2, 4, -6)$
      SOLUCIÓN

   b) $(3, 0, 0) \bullet (0, -4, 0)$

SOLUCIÓN

5. Determinar la suma de los vectores:

   a) $< -1, 5 > \quad y \quad < 6, -1 >$

   SOLUCIÓN

$$x = -1 + 6 = 5$$
$$y = 5 - 1 = 4$$
$$\vec{A} + \vec{B} = < 5, 4 >$$
$$\left|\left|\vec{A} + \vec{B}\right|\right| = \sqrt{41}$$

   b) $< 3, -3 > \ y < 1, 6 >$

   SOLUCIÓN

$$x = 3 + 1 = 4$$
$$y = -3 + 6 = 3$$
$$< x, y > = < 4,3 >$$
$$\left|\left|\vec{D} + \vec{C}\right|\right| = \sqrt{25}$$
$$\left|\left|\vec{D} + \vec{C}\right|\right| = 5$$

6. Determinación en cada inciso a • b

   a) $a < 5, -2 > \ ; \ b < 3, 4 >$

   SOLUCIÓN

$$a \bullet b = (5)(3) + (-2)(4) = 15 - 8$$
$$a \bullet b = 7$$

   b) $a < 1.5, 0.4 > ; \ b < -4, 6 >$

   SOLUCIÓN

$$a \bullet b = (1.55)(-4) + (0.4)(6) = -6 + 2.4$$
$$a \bullet b = -3.6$$

   c) $a = i - 2j + 3k \quad ; \quad b = 5i + 9k$

   SOLUCIÓN

$$a \bullet b = 5 + 0 + 27 = 32$$

7. Determine el ángulo entre los vectores (Determine primero una expresión exacta y después aproxime al grado más cercano) para cada inciso

   a) $a < 4, 3 > ; \qquad b < 2, -1 >$

   SOLUCIÓN

$$\theta_A = Cos^{-1}\left(\frac{4}{5}\right) = 36.869897°$$

$$\theta_B = Cos^{-1}\left(\frac{2\sqrt{5}}{5}\right) = 26.56505°$$
$$\theta = 63.43494818°$$

b) $a < 1, -4, 1 >$; $b < 0, 2, -2 >$

SOLUCIÓN

$$A \bullet B = (1)(0) + (-4)(2) + (1)(-2)$$
$$= 0 - 8 - 2$$
$$A \bullet B = -10$$
$$||A|| = \sqrt{1 + 16 + 1} \quad ||A|| = \sqrt{18}$$
$$||B|| = \sqrt{0 + 4 + 4} \quad ||B|| = \sqrt{8}$$

$$A \bullet B = ||A|| \quad ||B|| \cos\theta$$
$$-10 = \sqrt{18} \ \sqrt{8} \cos\theta$$
$$\frac{-10}{\sqrt{18}\sqrt{8}} = \cos\theta$$
$$Cos^{-1}\left(\frac{-10}{\sqrt{18}\sqrt{8}}\right) = \theta$$
$$146.442° = \theta$$

8. Determine las proyecciones escalar y vectorial de b en a para cada inciso

a) $a < 4, 7, -4 >$; $b < 3, -1, 1 >$

SOLUCIÓN

$$P_{u,v} = \left(\frac{\vec{u} \bullet \vec{v}}{|\vec{v}|^2}\right)(\vec{v})$$
$$= \frac{(3, -1, 1) \bullet (4, 7, -4)}{81}(4, 7, -4)$$
$$= \frac{1}{81}(4, 7, -4)$$
$$= \left(\frac{4}{81}, \frac{7}{81}, \frac{-4}{81}\right)$$

b) $a < -1, 4, 8 >$; $b < 12, 1, 2 >$

SOLUCIÓN

$$P_{b,a} = \frac{(12, 1, 2) \bullet (-1, 4, 8)}{81}(-1,4, 8)$$
$$Pb, a = \frac{8}{81}(-1, 4, 8)$$
$$Pb, a = \left(\frac{-8}{81}, \frac{32}{81}, \frac{64}{81}\right)$$

9. Determine lo siguiente. $P\ (1, 0, 1)$ $Q(-2, 1, 3)$ $R(4, 2, 5)$

a) Un vector diferente de cero ortogonal al plano que pasa por los puntos P, Q y R

SOLUCIÓN

$$\det PQ * PR \begin{vmatrix} i & j & k \\ -1 & -1 & -2 \\ -3 & -2 & -4 \end{vmatrix}$$
$$área = \frac{1}{2}\left[i[4 - 4] - j[4 - 6] + k[2 - 3]\right]$$

$$área = \frac{1}{2}[0i + 2j - k]$$
$$área = 0i + j - \frac{1}{2}k$$

10. Determinar el volumen del paralelepípedo con extremos adyacentes PQ, PR y PS

$$P\,(-2,1,0);\; Q(2,3,2);\; R(1,4,-1);\; S(3,6,1)$$

SOLUCIÓN

$$PQ = (0,-2,-2)$$
$$PR = (-3,-3,-1)$$
$$PS = (\,-5,-5,-1)$$

$$\begin{array}{cccc} & i & j & k \\ PR * PS & 0 & -2 & -2 \\ & -5 & -5 & -1 \end{array}$$
$$= i(2-10) - j(0-10) + k(0-10)$$
$$= -8i + 10j - 10k$$

$$PR \bullet (PR \bullet PS) = (-3,-3,-1) \bullet (-8i + 10j - 10k)$$
$$= 24 - 30 + 10$$
$$= 4$$

11. Resolver $f(x,y) = 3x^2 + 5y^3 - 7\,sen(xy)$

SOLUCIÓN

$$fx = \frac{\partial}{\partial_x}(3x^2 + 5y^3 - 7sen\,(x,y)$$
$$fx = 6x^1 + 0 - 7\,cos(xy)y$$
$$= 6x - 7y\cos(xy)$$
$$fy = \frac{\partial}{\partial_x} = 3x^2 + 5y^3 - 7sen\,(xy)$$
$$= 15y^2 - 7\cos(xy)\,x$$
$$= 15y^2 - 7cos\,(xy)$$

12. Resolver $z = xe^{xy}$ con $(2,0,2)$ para obtener la ecuación del plano tangente

SOLUCIÓN

$$z_x = xe^{xy}(y) + e^{xy} = e^{xy}(xy+1)$$
$$z_y = xe^{xy}(x) = x^2e^{xy}$$
$$z_x(2,0) = e^{2(0)}(2(0)+1) = 1$$
$$z_y(2,0) = (2)^2e^{2(0)} = 4(1) = 4$$

$$z - z_0 = z_x(x - x_0) + z_y(y - y_0)$$
$$z - 2 = 1\,(x-2) + 4(y-0)$$
$$z - 2 = x - 2 + 4y$$
$$-2 + 2 = x + 4y - z$$
$$x + 4y - z = 0$$

13. Obtener la derivada direccional de $u =< \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} >$

    SOLUCIÓN

$$f(x,y) = xe^y \qquad P(1,0)$$
$$fx = e^y \qquad fy = xe^y$$
$$fx = (1,0) = e^0 = 1 \qquad fy(1,0) = 1e^0 = 1$$
$$Du\, f(x,y) = e^y \frac{\sqrt{2}}{2} + xe^y \frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$Du\, f(1,0) = 1\frac{\sqrt{2}}{2} + 1\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$$

14. Resolver las siguientes derivadas parciales
    a) $f(x,y) = xe^x$

    SOLUCIÓN

$$fx = \frac{\partial}{\partial x}(xe^x) = e^y \frac{dy}{dx} = e^x$$

$$fxx = \frac{\partial}{\partial x} e^y = 0$$
$$fy = \frac{\partial}{\partial y} = (xe^y) = xe^y$$
$$fyy = \frac{\partial}{\partial y}(xe^y) = xe^y$$
$$fxy = \frac{\partial}{\partial y}\, fx = \frac{\partial}{\partial y}(e^y) = e^y$$

    b) $f(xy) = x^2 + 3xy^2 - 5y^3$

    SOLUCIÓN

$$fx = 2x + 3y^2 \qquad ó \qquad fy = 6xy - 15y^2$$

$$fxx = 2 \qquad ó \qquad fyy = 6x - 30y$$

$$fxy = 6y \qquad ó \qquad fyx = 6y$$

    c) $f(xyz) = xy^2e^{-xz}$

    SOLUCIÓN

$$fx\frac{\partial}{\partial x} = xy^2e^{-xz} = y^2\frac{\partial}{\partial x}xe^{-xz} = y^2[-xze^{-x} + e^{-xz}]$$

$$f(x) = x \qquad f'(x) = 1$$

$$g(x) = e^{-xz} \qquad g'(x) = e^{-xz}(z) = -ze^{-xz}$$

$$fy\frac{\partial}{\partial y} = xy^2e^{-xz} = xe^{-xz}\frac{\partial}{\partial y}y^2 = xe^{-xz}(2y)$$

$$fy\frac{\partial}{\partial y} = 2xye^{-xz}$$

$$fz\frac{\partial}{\partial z} = xy^2e^{-xz} = xy^2\frac{\partial}{\partial z}e^{-xz} = xy^2e^{-xz}$$

$$\frac{\partial}{\partial z} - xz = xy^2e^{-xz}(-x)$$

$$fz = -x^2y^2e^{-xz}$$

d) $f(xy) = sen(2x+5y)fyxy$

SOLUCIÓN

$$fy = \frac{\partial}{\partial y}sen(2x+5y) = \cos(2x+5y)\,5$$
$$= 5\cos(2x+5y)$$
$$fyx = \frac{\partial}{\partial x} = 5\cos(2x+5y) = 5(-sen(2x+5y)2)$$
$$= -10sen(2x+5y)$$
$$fyxy = \frac{\partial}{\partial y} = -10sen(2x+5y) = -10\cos(2x+5y)\,5$$
$$= -50\cos(2x+5y)$$

e) $V = \ln(r+s^2+t^3)$

SOLUCIÓN

$$Vt = \frac{\partial}{\partial t}\ln(r+s^2+t^3) = \frac{3t^3}{r+s^2+t^3}$$
$$Vts = \frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{3t^2}{r+s^2+t^3}\right) = \frac{-6t^2s}{(r+s^2+t^3)}$$
$$Vtr = \frac{\partial}{\partial r} = \frac{-6t^2s}{(r+s^2+t^3)} = \frac{+12ts}{(r+s^2+t^3)}$$

15. Resolver la ecuación del plano tangente

SOLUCIÓN

$$z = xe^{xy} \qquad\qquad (x_0 = 2, y_o = 0, z_0 = 2)$$

$$Parciales$$

$$z_x = xe^{xy}(y) + e^{xy} = e^{xy}(xy+1)$$
$$z_y = xe^{xy}(x) = x^2e^{xy}$$
$$z_x = (2,0) = e^{2(0)}(2(0)+1) = 1$$
$$z_y = (2,0) = (2)^2e^{2(0)} = 4(1) = 4$$
$$z - z_0 = z_x(x-x_0) + z_y(y-y_0)$$
$$z - 2 = 1(x-2) + 4(y-0)$$
$$z - 2 = x - 2 + 4y$$
$$-2 + 2 = x + 4y - z$$
$$x + 4y - z = 0$$

16. Resolver la integral de línea

$$\oint_{(1,1)}^{(2,4)} (y+x^2)dx + (2x-y)\,dy$$

Trayectoria recta

Sea la ecuación de la recta $y = mx + b$

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{4-1}{2-1} = \frac{3}{1} = 3$$

Sustituyendo m en la ecuación de la recta se tiene

$$y = 3x + b\,, falta\ el\ valor\ para\ b$$
$$4 = 3(2) + b$$
$$4 = 6 + b$$
$$4 - 6 = b$$
$$-2 = b$$
$$por\ lo\ que\ la\ trayectoria\ es$$
$$y = 3x - 2$$

Sustituyendo en la integral

$$\oint_{(1,1)}^{(2,4)} \left((3x-2) + x^2\right)dx + \left(2x - \ (3x-2)\right)dx$$

$$\oint_{(1,1)}^{(2,4)} (3x - 2 + x^2)dx + (-x + 2)dy$$

Derivando la función se obtiene

$$\frac{dy}{dx} = 3x - 2$$

$$\frac{dy}{dx} = 3$$

$$dy = 3\ dx$$

$$\oint_{(1,1)}^{(2,4)} (3x - 2 + x^2)dx + (x + 2)(3\ dx)$$

$$\oint_{(1,1)}^{(2,4)} x^2 + 3x - 2 + 3x + 3\ dx$$

$$\oint_{1}^{2} x^2 + 6x + 1\ dx$$

$$= \left(\frac{x^3}{3}\right)_1^2 + \left(\frac{x^2}{2}\right)_1^2 + (x)_1^2$$

$$= \left(\frac{2^3}{3} - \frac{1^3}{3}\right) + \left(\frac{2^2}{2} - \frac{1^2}{2}\right) + (2 - 1)$$

$$= \frac{7}{3} + \frac{3}{2} + 1\ = \frac{29}{6}$$